

## **Коммунальное хозяйство городов**

ствует о необходимости дальнейшего проведения экспериментальных и теоретических работ в указанной области.

1. Вахненко П.Ф. та ін. Залізобетонні конструкції. – К.: Вища шк., 1999. – 508 с.
2. Голышев А.Б., Бачинский В.Я., Полищук В.П. Железобетонные конструкции. Т.2. – К.: НИИСК Госстроя Украины, 2003. – 410 с.
3. СНиП 2.03.01-84\*. Бетонные и железобетонные конструкции.
4. Золотов М.С., Симейко И.В. Несущая способность и деформативность гибких железобетонных стержней // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып.72. – К.: Техніка, 2006. – С.343-347.
5. Чихладзе Э.Д. Сопротивление материалов. – Харьков: УкрГАЗТ, 2002. – 362 с.
6. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. – М.: АСВ, 2004. – 472 с.

*Получено 07.01.2007*

УДК 624.012.44

О.А.ШКУРУПІЙ, канд. техн. наук, Д.М.ЛАЗАРЄВ

*Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка*

### **ВИКОРИСТАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ І ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МІЦНОСТІ НОРМАЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ З ЕКСТРЕМАЛЬНИМ КРИТЕРІЄМ**

Розроблена методика розрахунку міцності нормальних перерізів стиснутих (розтягнутих) або зігнутих залізобетонних елементів (ЗБЕ) на основі деформаційної моделі (ДМ) з екстремальним критерієм міцності (ЕKM) із застосуванням чисельних та оптимізаційних методів. За даною методикою розроблена програма для ПЕОМ і виконані дослідження впливу форми поперечного перерізу, процента армування, класу бетону на міцність нормального перерізу й граничні характеристики стиснутої зони бетону ЗБЕ.

У бетоні стиснутої зони нормальних перерізів ЗБЕ в передграничному і граничному станах відбувається специфічний перерозподіл напружень, що супроводжується їх зниженням в найбільш деформованому шарі, поблизу стиснутої грані ЗБЕ, хоча деформації продовжують наростати. Про це свідчать експерименти [1] та ін. Відмічене зниження напружень (розміцнення), характерне для структурно-неоднорідних (псевдопластичних) матеріалів, таких як бетони, гірські породи тощо. Для них характерний неоднорідний напружено-деформований стан (НДС). Розміцнення обумовлено проявом низхідної гілки повної діаграми стиску (ПДС), що відображає процес зниження несучої здатності матеріалу, внаслідок наростання ступеня його зруйнованості.

Для урахування зниження напружень бетону в розрахунку міцності нормальних перерізів ЗБЕ необхідна ПДС з низхідною гілкою мак-

симальної протяжності, оскільки наперед невідомо якої довжини її ділянка буде реалізована в конкретній задачі.

Необхідність удосконалення відомих ДМ у напрямі врахування достовірних залежностей реальної роботи матеріалів, механічних і геометричних характеристик тощо відмічена у роботах [2-4] та ін.

ДМ з ЕКМ має значні переваги перед існуючими ДМ з емпіричним критерієм міцності. При врахуванні реальних діаграм роботи арматури, а також використанні чисельних і оптимізаційних методів вона дає можливість отримати міцність та граничні характеристики бетону нормального перерізу ЗБЕ завдяки врахуванню низхідної гілки ПДС бетону [3, 4, 6-9].

Екстремальний характер ПДС бетону, що має строгий максимум  $A(\varepsilon_R; R_b)$  (рис.1, а), обумовлює існування строгого максимуму  $T(\varepsilon_{bu}; F_{\max})$  залежності між зусиллям у перерізі  $F$  та деформацією стиснутої грані бетону  $\varepsilon_{bm}$  нормального перерізу ЗБЕ (рис.1, б), що приводить до існування екстремального критерію міцності нормального перерізу [2]

$$F(\varepsilon_{bm}, \dots) = \max \text{ при } \varepsilon_{bm} = \varepsilon_{bu}. \quad (1)$$

Повнота моделі [3, 6-9] обумовлює необхідність ретельного контролю значень усіх граничних параметрів ЗБЕ і особливо напруження в розтягнутій  $\sigma_s$  та стиснутій  $\sigma'_s$  арматурі, оскільки розрахункові залежності суттєво різняться в діапазонах її пружної та непружної роботи. Тому обмежений контроль параметрів може призвести до результатів, які не відповідають дійсності.

Метою роботи є дослідження міцності, граничних характеристик стиснутої зони бетону, напружень в розтягнутій та стиснутій арматурі з урахуванням реальних діаграм її роботи, а також впливу форми поперечного перерізу, міцності бетону та процента армування на вказані вище характеристики нормального перерізу стиснутих (розтягнутих) з різними ексцентриситетами або зігнутих ЗБЕ на основі ДМ з ЕКМ із застосуванням оптимізаційних і чисельних методів.

Дослідження обмежувалося задачею розрахунку міцності нормального перерізу стиснутих (розтягнутих) або зігнутих ЗБЕ (рис.2), а також ставилось за мету виявити вплив форми поперечного перерізу, процента армування на граничну деформацію стиснутої грані бетону, напруження в розтягнутій та стиснутій арматурі з урахуванням реальних діаграм роботи матеріалів.

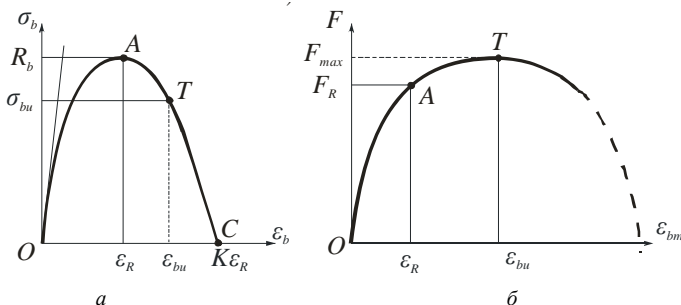


Рис.1 – Повна діаграма стиску бетону  $\sigma_b - \varepsilon_b$  (а), залежність „зусилля перерізу  $F$  – деформація стиснутої грані бетону перерізу  $\varepsilon_{bm}$ ” ЗБЕ (б).

### Розрахункові положення

1. Розглядаються ЗБЕ з арматурою, що має зчеплення з бетоном.
2. Розглядаються ЗБЕ різних форм перерізу (рис.2).
3. Розглядається граничний стан руйнування нормального перерізу, в якому за наявності розвиненої нормальної тріщини нехтуємо опором розтягнутого бетону над тріщиною в порівнянні з опором розтягнутої звичайної арматури  $A_s$ .
4. Розглядається пропорційне монотонно зростаюче навантаження перерізу згинаючим моментом  $M$  або поздовжньою силою  $N$ .
5. Граничний стан руйнування нормального перерізу розглядається як миттєвий, що визначається кінцевою комбінацією навантажень у момент досягнення критерію (1), коли в бетоні стиснутої зони складаються відповідне рівнянням механіки деформованого твердого тіла (МДТТ) і умові (1) розподіл напружень і деформацій, який не залежить від шляху завантаження і початкових напружень і деформацій. Незалежність від шляху завантаження справедлива і для арматури з фізичною межею текучості, що досягла останньої у стадії руйнування непереармованого перерізу. Для арматури з фізичною межею текучості, що перебуває в пружному стані у момент руйнування переармованого перерізу, а також для арматури з умовною межею текучості, знаходяться повні деформації  $\varepsilon_s$  або  $\varepsilon'_s$  (напруження  $\sigma_s$  або  $\sigma'_s$ ) від граничного навантаження  $F_u$ .
6. Приймається гіпотеза плоских перерізів, що дозволяє виразити через деформацію стиснутої грані бетону  $\varepsilon_{bm}$  деформації стиснутої зони бетону на рівні її волокон з координатою  $\zeta$ , відлічуваною від нульової лінії деформацій і напружень (рис.2).

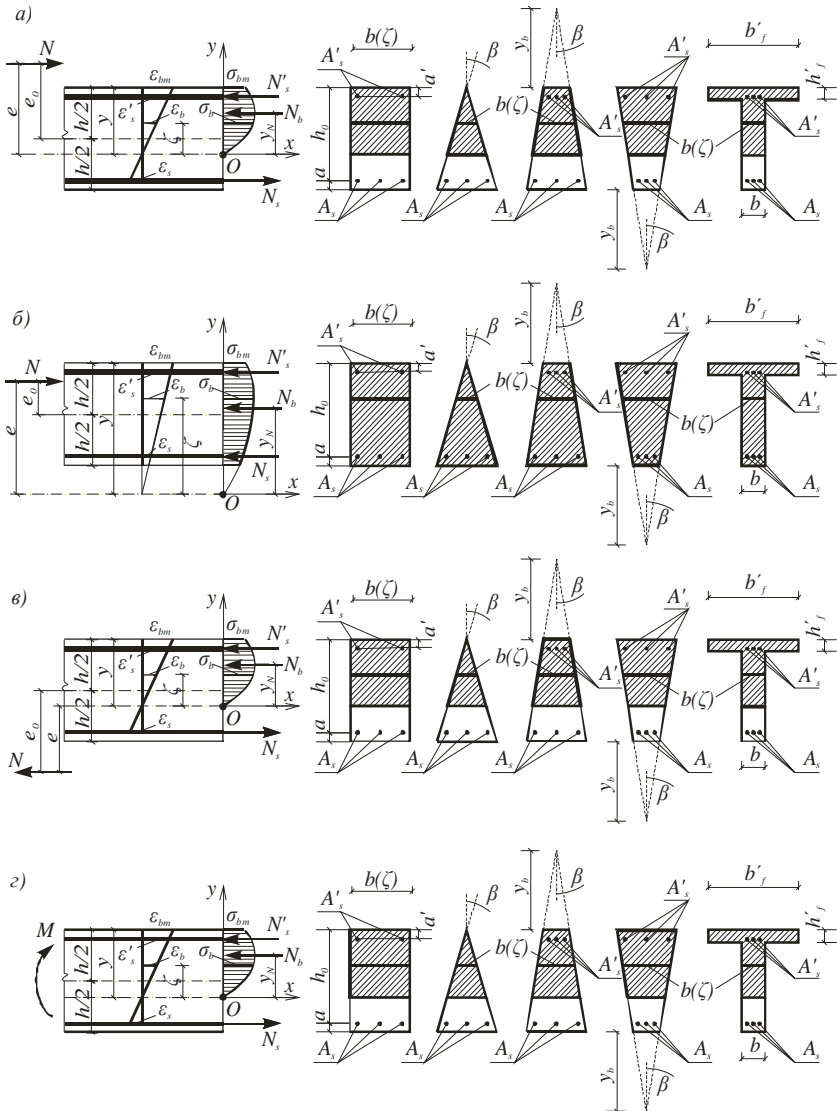


Рис.2 – Розрахункова схема ЗБЕ і розглянуті форми поперечних перерізів для випадків позациврового стиску при великих (а) та малих (б) ексцентриситетах, розтягу (в) та згину (г)

7. Стан руйнування нормального перерізу описується розрахунковими схемами зусиль і деформацій, показаними на рис.2. При цьому схема на рис.2, *а*, *в* відповідає позацинтровому стиску (розтягу) з великими ексцентриситетами (ВЕ), коли переріз частково стиснутий. Схема на рис.2, *б* відповідає позацинтровому стиску з малими ексцентриситетами (МЕ), коли переріз повністю стиснутий. Випадок позацинтрового розтягу з малими ексцентриситетами не показаний як такий, що не представляє труднощів при розрахунку міцності. Схема на рис.2, *г* відповідає випадку чистого згину.

Таким чином, розрахункові схеми на рис.2 в рамках ДМ з ЕКМ, що пропонується, охоплюють усі випадки розрахунку.

#### *Розрахункові залежності*

Для визначення зв'язку навантаження  $F$  з деформаціями і напруженнями бетону стиснутої зони  $\varepsilon_b$ ,  $\sigma_b$ , арматури розтягнутої  $\varepsilon_s$ ,  $\sigma_s$  і стиснутої  $\varepsilon'_s$ ,  $\sigma'_s$  зон перерізу ЗБЕ використовуємо розрахункові схеми на рис.2, а також:

##### 1. Фізичні:

а) для бетону – у вигляді апроксимації, запропонованої М.Саргеном і рекомендованої ЄКБ-ФІП

$$\sigma_b = R_b(K\eta - \eta^2) / [1 + (K - 2)\eta], \quad (2)$$

де рівень деформації  $\eta$  та параметр деформативно-міцнісних (механічних) властивостей бетону  $K$  визначаються за формулами:

$$\eta = \varepsilon_b / \varepsilon_R; \quad K = E_b \varepsilon_R / R_b. \quad (3)$$

Тут  $E_b$  – початковий модуль пружності бетону, що обчислювався за формулою  $E_b = 1,1 \cdot 10^4 R_b^{0,3}$  [5];  $R_b, \varepsilon_R$  – напруження й деформація в максимумі кривої  $\sigma_b - \varepsilon_b$  (рис.1, *а*). Деформація  $\varepsilon_R$  визначалась за формулою ЄКБ-ФІП

$$\varepsilon_R = 70 \cdot 10^{-5} R_b^{0,31}; \quad (4)$$

б) для арматури аналітичні вирази діаграми розтягу (стиску) розділені на два відомих типи: з фізичною границею текучості  $\sigma_y$  і з умовною границею текучості  $\sigma_{0,2}$  (рис.3) [3, 4]. При цьому, для арматури з фізичною границею текучості  $\sigma_y$  (рис.3, *а*) іноді (при досить малій кількості арматури) потрібно розглянути область зміцнення  $BC$ , що на інтервалі деформацій  $\varepsilon_{yu} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}$  можна апроксимувати па-

раболою [3, 4].

Для арматури без площадки текучості застосовується лінійно-двопараболічна апроксимація діаграми розтягу [3,4].

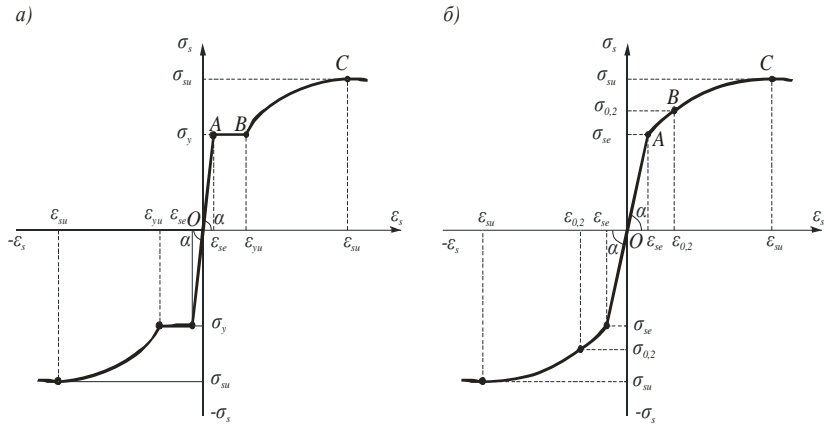


Рис.3 – Діаграми розтягу (стиску) арматурних сталей з фізичною (а) і умовною (б) границями текучості

2. Геометричні залежності визначались на основі гіпотези плоских перерізів, що дозволяє виразити через деформацію  $\varepsilon_{bm}$  деформації стиснутої зони бетону  $\varepsilon_b$  на рівні волокон з координатою  $\zeta$ , а також деформації розтягнутої і стиснутої арматури (рис.2):

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{bm} \cdot \zeta / y ; \quad (5)$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{bm} (h_0 / y - 1) ; \quad (6)$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{bm} (1 - a' / y) , \quad (7)$$

де  $y$  – висота стиснутої зони бетону,  $a'$  – відстань від рівнодіючої в арматурі стиснутої зони бетону до найближчої грані перерізу;  $h_0$  – робоча висота перерізу.

Прийнявши позначення  $\alpha = \varepsilon_{bm} / \varepsilon_R$ , одержимо, що  $\eta = \alpha \zeta / y$ , де  $\alpha$  – відносна деформація стиснутої грані бетону ЗБЕ в нормальному перерізі.

3. Рівняння рівноваги, для випадків:

– позацентрового стиску (розтягу з БЕ) та центрального стиску (рис.2, а, б, в)

$$\sum X = 0; \quad N \pm \sigma_s \cdot A_s - N_b - \sigma'_s \cdot A'_s = 0 ; \quad (8)$$

$$\sum M_O = 0; \quad N \cdot e - N_b \cdot y_N - \sigma'_s \cdot A'_s (y - a') - \sigma_s \cdot A_s (h_0 - y) = 0. \quad (9)$$

У рівнянні (8) знак "+" приймається у випадку БЕ, а "-" – у випадку МЕ та центрального стиску. При позацентровому розтягу з БЕ (рис.2, в) у рівнянні (8) знак поздовжньої сили зміниться на протилежний;

– чистого згину (рис.2, з)

$$\sum X = 0; \quad \sigma_s \cdot A_s - N_b - \sigma'_s \cdot A'_s = 0; \quad (8^1)$$

$$\sum M_O = 0; \quad M - N_b \cdot y_N - \sigma'_s \cdot A'_s (y - a') - \sigma_s \cdot A_s (h_0 - y) = 0, \quad (9^1)$$

де  $N_b$  – рівнодіюча бетону стиснутої зони

$$N_b = \iint_{A_b} \sigma_b(\alpha, \zeta) dx d\zeta = \int_0^y \sigma_b(\alpha, \zeta) \left( \int_{b_1(\zeta)}^{b_2(\zeta)} dx \right) d\zeta = N_b(\alpha, y); \quad (10)$$

$e$  – ексцентриситет прикладання сили  $N$  відносно нейтральної осі перерізу (рис.2)

$$e = e_0 - h/2 + y = e(y); \quad (11)$$

$e_0$  – ексцентриситет прикладання сили  $N$ , відносно центра перерізу (рис.2);

$y_N$  – відстань від нульової лінії деформацій до точки прикладання зусилля  $N_b$ , яку представимо у вигляді

$$y_N = \left( \iint_{A_b} \sigma_b(\alpha, \zeta) \zeta dx d\zeta \right) / N_b = \left( \int_0^y \sigma_b(\alpha, \zeta) \zeta \left( \int_{b_1(\zeta)}^{b_2(\zeta)} dx \right) d\zeta \right) / N_b = y_N(\alpha, y). \quad (12)$$

Використовуючи залежності (2)-(9), з урахуванням (10)-(12) одержимо систему рівнянь з невідомими  $N, \alpha, y$ , наприклад, для випадку позацентрового та центрального стиску:

$$\left\{ N \pm \sigma_s(\alpha, y) A_s - N_b(\alpha, y) - \sigma'_s(\alpha, y) A'_s = 0; \quad (13) \right.$$

$$\left\{ N \cdot e(y) - N_b(\alpha, y) y_N(\alpha, y) - \sigma'_s(\alpha, y) A'_s (y - a') - \sigma_s(\alpha, y) A_s (h_0 - y) = 0. \quad (14) \right.$$

Для визначення невідомих  $N, \alpha, y$  використовуємо (13), (14) і додаткову умову у вигляді екстремального критерію міцності нормального перерізу (1). У результаті маємо оптимізаційну задачу нелінійного математичного програмування на умовний екстремум із цільовою функцією (1) при обмеженнях-рівностях (13), (14).

Обчислення визначених інтегралів (10), (12) застосовувався чисельний метод Сімпсона. Для розв'язання оптимізаційної задачі нелінійного математичного програмування застосовувався ітераційний метод

Ньютона, а для перевірки обчислень використовувався метод спряжених градієнтів. Наведена вище методика на основі сформульованих розрахункових положень та залежностей, із застосуванням вказаних чисельних методів реалізована у програмі для ПЕОМ "МОК1-05".

Дана методика дозволяє виконати обчислення при будь-яких значеннях опорів бетону та напруженнях у арматурі [3, 6-9].

Аналіз граничних характеристик стиснутої зони бетону виконаний для нормальних перерізів різної форми, проценту армування, класу бетону, виду зовнішнього навантаження та ексцентриситету його прикладання, наведений в [3, 6-9].

#### *Висновки*

1. Повна діаграма стиску бетону, що має строгий максимум і низхідну гілку, проявляється в ЗБЕ з неоднорідним НДС, обумовлюючи подібну собі залежність параметра навантаження  $F$  від деформації стиснутої грані бетону  $\varepsilon_{bm}$  та необхідність ДМ із ЕКМ нормального перерізу.

2. ДМ з ЕКМ нормального перерізу обумовлює оптимізаційний характер задачі перевірки міцності, що має відповідну цільову функцію (1).

3. Розрахунки міцності нормальних перерізів ЗБЕ відповідно до ДМ з ЕКМ можна виконувати на основі оптимізаційних та чисельних методів.

4. Для впровадження в практику наведеної вище методики на основі ДМ з ЕКМ розроблена програма "МОК1-05", що дозволяє проводити повний аналіз граничних параметрів нормальних перерізів різної форми на широкому діапазоні міцності бетону з урахуванням повної діаграми роботи арматури.

5. ДМ з ЕКМ є точнішою і загальною в порівнянні з відомими ДМ, на основі якої можна з'ясувати та врахувати вплив механічних властивостей бетону, форми перерізу, кількості та класу арматури, на граничну деформацію стиснутої грані бетону  $\varepsilon_{bu}$  та міцність нормального перерізу позацинтрово стиснутих (розтягнутих) та зігнутих ЗБЕ.

6. Сукупність ДМ з ЕКМ та оптимізаційного розрахункового апарату [3, 6-9] дозволяє аналізувати повний комплекс граничних параметрів нормальних перерізів у стадії їх руйнування, виявляти пружний або пластичний стан роботи арматури тощо.

1.Дегтярев В.В., Гагарин К.А. Метод экспериментального определения напряженного состояния железобетонного сечения при изгибе // Труды ЦНИИС. Вып.70. – М.: Транспорт, 1969. – С.67-71.



2. Митрофанов В.П., Арцев С.И. Предельная сжимаемость бетона нормальных сечений железобетонных элементов // Проблемы теории і практики залізобетону: Зб. наук. праць. – Полтава: ПДТУ, 1997. – С.333-337.

3. Шкурупій О.А., Лазарев Д.М. Розрахунок міцності нормальних перерізів стиснутих залізобетонних елементів із застосуванням екстремального критерію // Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. Вип.14. – Рівне: НУВГП, 2006. – С. 374-381.

4. Митрофанов В.П. Практическое применение деформационной модели с экстремальным критерием прочности железобетонных элементов // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вип.60. – К.: Техніка, 2004. – С.29-48.

5. Holand I., Strength Concrete in Model Code 90. 5<sup>th</sup> Int. Symp. on Utilization of HS/HP Concrete, 20-24 June 1999, Sandefjord, Norway. Procedures, Volume 1. – P.362-367.

6. Митрофанов В.П., Шкурупій А.А., Митрофанов Б.П., Лазарев Д.Н. О влиянии формы нормального сечения на предельную деформацию бетона сжатой зоны // Зб. наук. праць. Сер. “Галузеве машинобудування, будівництво”. Вип.15. – Полтава: ПолтНТУ, 2005. – С. 89–94.

7. Митрофанов В.П., Шкурупій О.А., Лазарев Д.М., Митрофанов Б.П. Влияние прочности бетона и количества арматуры на граничные характеристики нормального перереза железобетонных элементов // Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. Вип.12. – Рівне: НУВГП, 2005. – С.208-217.

8. Шкурупій О.А., Лазарев Д.М. Розрахунок міцності нормальних перерізів центрально стиснутих залізобетонних елементів із застосуванням екстремального критерію // Вісник Вінницьк. політехн. ін.-ту. Вип.4. – Вінниця: ВПТІ, 2006. – С.20-33.

9. Шкурупій О.А., Лазарев Д.М. Урахування реальної роботи арматури при розрахунку міцності центрально стиснутих залізобетонних елементів // Зб. наук. праць. Сер. “Галузеве машинобудування, будівництво”. Вип.18. – Полтава: ПолтНТУ, 2006. – С.67–75.

*Отримано 26.03.2007*

УДК 519.633.2

М.Т.КУЗЛЮ, канд. техн. наук

*Національний університет водного господарства та природокористування, м.Рівне*

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВОДОНАСИЧЕНИХ ГРУНТОВИХ МАСИВІВ**

Наводиться розв’язок задачі з оцінки напружено-деформованого стану шару ґрунту з урахуванням наявності рівня ґрунтових вод для одновимірного випадку. Отриманий розв’язок підтверджено прикладом.

Вивчення досвіду проектування та будівництва будівель і споруд показало, що їх експлуатацію нерідко проходиться вести при наявності рівня ґрунтових вод. При цьому його положення може змінюватися залежно від гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів.

Рух вільної поверхні ґрунтових вод веде до виникнення різноманітних об’ємних сил і зміни напружено-деформованого стану ґрунтового масиву [1]. Про важливість цієї проблеми свідчить статистика